階数2のシンプレクティック群に関するユニポテント軌道積分の係数について (保型表現とその周辺)

若槻, 聡

数理解析研究所講究録
第1871巻 2013年 18-27

階数2のシンプレクティック群に関するユニポテント軌道積分の係数について

金沢大学・理工研究域　若槻 聡 (Satoshi Wakatsuki)
Institute of Science and Engineering, Kanazawa University

このノートでは, Bielefeld大学のHoffmann氏との共同研究 [HW] の主結果である階数2のシンプレクティック群に関するユニポテント軌道積分の係数の結果を紹介する. 数理研の集会での講演後に, 複数の研究者からアーサー跡公式の幾何サイドにおけるユニポテント軌道積分の係数の研究背景が良く分からないと言われた。確かに既知の研究との関わりが分かり難い対象であるようなので, まず最初にSL(2) の場合のユニポテント項と係数の詳細を説明した後に, 関連する既知の研究に言及したい. その後に我々の主結果について記述する.

1. SL(2)

このセクションを通じて $G=\mathrm{SL}(2)$ と置く. $G(\mathbb{A})$ の跡公式の幾何サイドのユニポテント項を具体的に記述しよう.

まず跡公式の幾何サイドを記述するための準備を行う. F を代数体とし, $\mathbb{A}$ を F のアデール環とする. Σ を F の素点全体の集合とし, Σ_∞ を無限素点全体から成る Σ の部分集合, Σ_{fin} を有限素点全体から成る Σ の部分集合とする. さらに, $\Sigma_{\mathbb{R}}$ を実素点全体, $\Sigma_{\mathbb{C}}$ を複素素点全体としよう. 各 $v\in\Sigma$ に対して, F_v を F の v に関する完備化とする. 各 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して, $\mathfrak{O}_v$ を F_v の整数環とし, π_v を素元, q_v を剰余体の位数とする. 各素点 $v\in\Sigma$ について $|\,|_v$ を正規付値とし, イデールノルム $|\,|=\prod_{v\in\Sigma}|\,|_v$ を得る. $\mathbb{A}^\times$ をイデールとし, $\mathbb{A}^1=\{a\in\mathbb{A}^\times\mid |a|=1\}$, $(\mathbb{R}^\times)^0=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ とする. $\chi=\prod_{v\in\Sigma}\chi_v$ を $F^\times\backslash\mathbb{A}^1\cong F^\times(\mathbb{R}^\times)^0\backslash\mathbb{A}^\times$ 上の指標とする. ヘッケ L 関数の局所因子を

$$L_v(s,\chi_v)=\begin{cases}(1-\chi_v(\pi_v)q_v^{-s})^{-1} & v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\text{ かつ }\chi_v\text{ は不分岐な場合}\\ 1 & \text{その他}\end{cases}$$

と定め, Σ の有限集合 S に対してヘッケ L 関数を

$$L^S(s,\chi)=\prod_{v\notin S}L_v(s,\chi_v)\,,\quad L(s,\chi)=\prod_{v\in\Sigma}L_v(s,\chi_v)$$

と定める. 良く知られているように $L^S(s,\chi)$ と $L(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し, s-平面に有理型接続される. $\mathbf{1}_F$ を $F^\times\backslash\mathbb{A}^1$ 上の自明な表現とし,

$$\zeta_F^S(s)=L^S(s,\mathbf{1}_F),\quad \zeta_F(s)=L(s,\mathbf{1}_F)$$

とおく. $\zeta_F^S(s)$ と $\zeta_F(s)$ は $s=1$ で1位の極を持つ. 一方, $\chi\neq\mathbf{1}_F$ なら $L^S(s,\chi)$ と $L(s,\chi)$ は $s=1$ で正則である. 定数 c_F を $\zeta_F(s)$ の $s=1$ での留数とし,

$$c_v=\begin{cases}(1-q_v^{-1})^{-1} & v\in\Sigma_\infty\text{ の場合}\\ 1 & v\in\Sigma_\infty\text{ の場合}\end{cases},\quad c_S=\prod_{v\in S}c_v,\quad c_F^S=c_S^{-1}c_F$$

とする. 次に G の部分群

$$M=\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\in G\},\quad N=\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G\}$$

を考える．$P=MN$ は G の放物型部分群であり，M はその Levi 部分群である．写像 $H_M : M(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ が $H_M(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}) = \log|a|$ で定められる．$G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト群として $\mathbf{K} = \prod_{v\in\Sigma} \mathbf{K}_v$,

$$\mathbf{K}_v = \mathrm{SU}(2) \ (v \in \Sigma_{\mathbb{C}}), \quad \mathbf{K}_v = \mathrm{SO}(2) \ (v \in \Sigma_{\mathbb{R}}), \quad \mathbf{K}_v = \mathrm{SL}(2, \mathfrak{O}_v) \ (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}})$$

をとる．岩澤分解によって写像 $H_P : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ を $H_P(mnk) = H_M(m)$, $m \in M(\mathbb{A})$, $n \in N(\mathbb{A})$, $k \in \mathbf{K}$ として定めておく．$G(\mathbb{A})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}g$ を固定する．$\mathbf{K}$ 上のハール測度 $\mathrm{d}k$ を $\int_{\mathbf{K}} \mathrm{d}k = 1$ で正規化し，$N(\mathbb{A})$ 上の測度 $\mathrm{d}n$ を $\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \mathrm{d}n = 1$ で正規化する．岩澤分解による積分の等式

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g)\mathrm{d}g = \int_{M(\mathbb{A})} \int_{N(\mathbb{A})} \int_{\mathbf{K}} f(mnk)\mathrm{d}m\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k$$

が成立するように $M(\mathbb{A})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}m$ の正規化を定める．

$$M(\mathbb{A})^1 = \{m \in M(\mathbb{A}) \mid H_M(m) = 0\}$$

とする．商測度 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}^1m$ の H_M による $\mathbb{R}$ 上の像測度がルベーグ測度となるように $M(\mathbb{A})^1$ 上のハール測度 d^1m を定める．

$$\mathrm{vol}_G = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \mathrm{d}g, \quad \mathrm{vol}_M = \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1} \mathrm{d}^1m$$

と記号を定めておく．

これより $G(\mathbb{A})$ に関する跡公式のユニポテント項の詳細を説明する．$\mathbb{R}$ 上のカットオフ関数 $\hat{\tau}_P$ を

$$\hat{\tau}_P(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if } t \le 0 \end{cases}$$

で定める．$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$ 上のコンパクトサポートを持つスムースな関数から成る空間を意味する．このとき $T \in \mathbb{R}$ とテスト関数 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ に対して，跡公式の幾何サイドのユニポテント項 $J^T_{\mathrm{unip}}(f)$ は次のような積分で定義される．

$$K_{G,\mathrm{unip}}(g,h) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}} f(g^{-1}\gamma h), \quad K_{P,\mathrm{unip}}(g,h) = \int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}nh)\mathrm{d}n$$

($\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}$ は $G(F)$ のユニポテント元全体の集合) ,

$$J^T_{\mathrm{unip}}(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \Big\{ K_{G,\mathrm{unip}}(g,g) - \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} K_{P,\mathrm{unip}}(\delta g, \delta g)\, \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T) \Big\} \mathrm{d}^1 g.$$

十分大きい T について $J^T_{\mathrm{unip}}(f)$ は絶対収束することが知られており，$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ 上の超関数となる．さらに $J^T_{\mathrm{unip}}(f)$ は T の多項式になり各係数は超関数となることが知られている．その多項式に形式的に $T_0 = 0$ を代入した超関数を $J_{\mathrm{unip}}(f) = J^{T_0}_{\mathrm{unip}}(f)$ と置く．一般論により $J_{\mathrm{unip}}(f)$ は重み付き軌道積分によって展開される．その展開を説明しよう．$\int_{\mathbf{K}_v} \mathrm{d}k_v = 1$ によって $\mathbf{K}_v$ 上のハール測度 $\mathrm{d}k_v$ を定める．さらに $\mathrm{d}x$ を $\int_{\mathbb{A}/F} \mathrm{d}x = 1$ と正規化した $\mathbb{A}$ 上のハール測度として定め，$\mathrm{d}x_v$ を F_v 上のハール測度として，$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ については $\int_{\mathfrak{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$ によって正規化しておき，$\mathrm{d}x = \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{d}x_v$ が成り立つとする．Σ_∞ を含む F の素点の有限集合 S を一つ固定しよう．$F_S = \prod_{v\in S} F_v$, $\mathbf{K} = \prod_{v\in S} \mathbf{K}_v$ と

おく．F_S 上のハール測度を $\prod_{v\in S}\mathrm{d}x_v$, $\mathbf{K}_S$ 上のハール測度を $\prod_{v\in S}\mathrm{d}k_v$ で定めておく．ψ^S を $\prod_{v\notin S}\mathbf{K}_v$ の特性関数とする．一般論において重要なのは

$$C_c^\infty(G(F_S)) \ni f_S \to f_S\psi^S = f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$$

による局所的なテスト関数 f_S と大域的なテスト関数 $f_S\psi^S$ の同一視にある．このノートでは誤解を避けるため，以下，同一視しないで

$$f_S \in C_c^\infty(G(F_S)) \quad と \quad f_S\psi^S = f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$$

を区別して書く．記号 $|\,|_S = \prod_{v\in S}|\,|_v$ と

$$u_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いる．G のユニポテント元の寄与の展開に現れる軌道積分は次の三つである．

$$J_G(1,f_S) = f_S(1), \quad J_M(1,f_S) = \int_{\mathbf{K}_S}\int_{F_S} f_S(k^{-1}u_xk)\,\log|x|_S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k,$$

$$J_G(u,f_S) = c_S\int_{\mathbf{K}_S}\int_{u(F_S^\times)^2} f_S(k^{-1}u_xk)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k \quad (u\in F_S^\times).$$

$G(F_S)$ の単位元でないユニポテント共役類の完全代表系は

$$\{\, u_x \mid x\in F_S^\times/(F_S^\times)^2 \,\}$$

で与えられる．[Arthur1] の主定理より，任意の $f_S \in C_c^\infty(G(F_S))$ に対して

$$J_{\mathrm{unip}}(f_S\psi^S) = \mathrm{vol}_G J_G(1,f_S) + \frac{\mathrm{vol}_M}{2}J_M(1,f_S) + \sum_{x\in F^\times/(F_S^\times)^2\cap F^\times} a^G(S,u_x)\,J_G(u_x,f_S)$$

を満たす定数 $a^G(S,u_x)$ が存在する．一般論において，単位元の係数は体積となるが，単位元でないユニポテント元 u についての係数 $a^G(S,u)$ は良く分かっていない．我々の目的は係数 $a^G(S,u)$ の持つ意味や性質を明らかにすることである．例えば GL(2) については [JL, GJ, FL] を見れば，その係数はデデキントゼータ関数の $s=1$ のローラン展開の定数項であることが分かる．GL(3) の係数については [Flicker, Matz, HW] を参照されたい．アデールではなく離散群を用いた形で（つまり，$S=\Sigma_\infty$ の場合のみ）F-rank one の場合に係数の研究が [Hoffmann] で行われている．係数の研究としてはアデールを用いた任意の S に対する結果が我々とって重要である．$G=\mathrm{SL}(2)$ の場合の係数についてこれまで言及した文献などはなかったように思うが，今回，Hoffmann 氏と共同研究を進めていく過程で，Labesse と Langlands の論文 [LL] を良く読めば上記の係数 $a^G(S,u)$ に美しい記述を与えれることが分かった．

$$\mathfrak{c}_F(S,\chi) = \lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)L^S(s,\chi)$$

と置く．定数 $\mathfrak{c}_F(S,\chi)$ は $L^S(s,\chi)$ の $s=1$ におけるローラン展開の定数項であり，χ が非自明指標であれば $\mathfrak{c}_F(S,\chi) = L^S(1,\chi)$ である．また指標 $\chi=\prod_{v\in\Sigma}\chi_v$ に対して

$$\chi_S = \prod_{v\in S}\chi_v$$

と置く．

定理 1. [LL]. 元 $x \in F^\times$ について，等式

$$a^G(S, u_x) = \frac{\mathrm{vol}_M}{2\, c_F} \sum_{\chi} \chi_S(x)\, \mathfrak{c}_F(S, \chi)$$

が成り立つ．ただし，上の和において $\chi = \prod_{v \in \Sigma} \chi_v$ はすべての $v \notin S$ について χ_v が不分岐であるような 2 次指標全体を走る．

Proof. 岩澤分解により等式

$$J^T_{\mathrm{unip}}(f) = \mathrm{vol}_G\, f(1) + \zeta^G(\phi, 1, T),$$

$$\zeta^G(\phi, s, T) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} |a^2|^s \Big\{ \sum_{x \in F^\times} \phi(xa^2) - \hat{\phi}(0)\, \hat{\tau}_P(-\log|a| - T) \Big\}\, \mathrm{d}^\times a,$$

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{K}} f(k^{-1} u_x k)\, \mathrm{d}k, \quad \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{A}} \phi(x) \mathrm{d}x$$

を得る．ただし，$M(\mathbb{A})$ と $\mathbb{A}^\times$ の同型 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a$ と $\mathrm{d}m$ によって $\mathbb{A}^\times$ 上のハール測度 $\mathrm{d}^\times a$ を定め，先に定めた $\mathbb{A}$ 上のハール測度 $\mathrm{d}x$ は同様にして $\mathrm{d}n$ から定まる測度と合致する．積分 $\zeta^G(\phi, s, T)$ が $\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束することは，岩澤テイト理論を思い出してポアソン和公式を用いれば分かる．$\mathrm{vol}_G\, f(1)$ は単位元の寄与である．次にゼータ積分

$$\zeta^G(\phi, s) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} |a^2|^s \sum_{x \in F^\times} \phi(xa^2)\, \mathrm{d}^\times a$$

を考えよう．このゼータ関数はテイト積分でないことに注意しよう．$\zeta^G(\phi, s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し，ポアソン和公式を使えば s-平面全体へ有理型接続することができる．主要部の比較により $\zeta^G(\phi, 1, T)$ は $\zeta^G(\phi, s)$ と次のように関係付けれる．

$$\zeta^G(\phi, 1, T) = \lim_{s \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\zeta^G(\phi, s) + \mathrm{vol}_M\, \hat{\phi}(0)\, T.$$

証明については例えば [GJ, TW] を参照されたい．その結果，ユニポテント元の寄与をより詳しく知るためには，上の $\zeta^G(\phi, s)$ の極限を調べることが求められる．次にテイト積分を導入して，Labesse と Langlands の公式を紹介しよう．χ を $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上の指標とする．テイト積分は

$$\zeta(\phi, s, \chi) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} |a|^s \chi(s) \sum_{x \in F^\times} \phi(xa)\, \mathrm{d}^\times a = \int_{\mathbb{A}^\times} |a|^s \chi(a)\, \phi(a)\, \mathrm{d}^\times a$$

と定義できる．もちろん，$\mathrm{Re}(s) > 1$ において $\zeta(\phi, s, \chi)$ は絶対収束し，s-平面全体へ有理型接続される．$(F^\times)^2 \backslash F^\times$ と $(F^\times)^2 \backslash \mathbb{A}^1$ に関するポアソン和公式を用いることで，次の Labesse と Langlands の公式 (cf. [LL]) が証明できる．

$$\zeta^G(\phi, s) = \frac{1}{2} \sum_{\chi} \zeta(\phi, s, \chi). \tag{1}$$

ただし χ は 2 次指標全体を走る．ϕ を固定しているので上の χ の和は本質的には有限和であることに注意されたい．公式 (1) は [Wright] でも別証明が与えられいるが，[LL] のポアソン和公式を用いる証明の方が簡潔である．良く知られているように $\chi \neq \mathbf{1}_F$ の

ときは $\zeta(\phi, s, \chi)$ は $s=1$ で極を持たない．$\zeta(\phi, s, \mathbf{1}_F)$ は $s=1$ で極を持つ可能性がある．その結果，

$$(2)\qquad \lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\zeta^G(\phi,s)=\frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\zeta(\phi,s,\mathbf{1}_F)+\frac{1}{2}\sum_{\chi\neq\mathbf{1}_F}\zeta(\phi,1,\chi)$$

を得る．ϕ^S を $\prod_{v\notin S}\mathfrak{O}_v$ の特性関数とすると，

$$\phi=\phi_S\phi^S,\quad \phi_S(x)=\int_{\mathbf{K}_S} f_S(k^{-1}u_x k)\,\mathrm{d}k$$

が成り立つ．局所ゼータ関数が

$$\zeta_S(\phi_S,s,\chi_S)=\int_{F_S^\times}|x|^{s-1}\chi_S(x)\,\phi_S(x)\,\mathrm{d}x$$

と導入される．このとき，測度の正規化に気をつけると，$\forall v\notin S$ について χ_v が不分岐なら

$$\zeta(\phi,s,\chi)=\frac{\mathrm{vol}_M}{c_F^S}L^S(s,\chi)\,\zeta_S(\phi_S,s,\chi_S)$$

が成り立ち，$\exists v\notin S$ について χ_v が分岐しているなら $\zeta(\phi,s,\chi)=0$ となる．よって，$\mathbf{1}_S$ を $F_S^\times$ 上の自明な表現として，$\zeta_S(\phi_S,s,\mathbf{1}_S)$ が $s=1$ で正則であることに気をつければ，

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\zeta(\phi,s,\mathbf{1}_F)=&\lim_{s\to+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\frac{\mathrm{vol}_M}{c_F^S}\zeta_F^S(s)\,\zeta_S(\phi_S,s,\mathbf{1}_S)\\ =&\frac{\mathrm{vol}_M}{c_F^S}\times\mathrm{Residue}_{s=1}\zeta_F^S(s)\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_S(\phi_S,s,\mathbf{1}_S)\Big|_{s=1}\\ &+\frac{\mathrm{vol}_M}{c_F^S}\times\lim_{s\to+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\zeta_F^S(s)\times\zeta_S(\phi_S,1,\mathbf{1}_S)\\ =&\mathrm{vol}_M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_S(\phi_S,s,\mathbf{1}_S)\Big|_{s=1}+\frac{\mathrm{vol}_M}{c_F}\mathfrak{c}_F(S,\mathbf{1}_F)\,c_S\zeta_S(\phi_S,1,\mathbf{1}_S)\\ =&\mathrm{vol}_M J_M(1,f_S)+\frac{\mathrm{vol}_M}{c_F}\mathfrak{c}_F(S,\mathbf{1}_F)\sum_{x\in F_S^\times/(F_S^\times)^2}J_G(u_x,f_S)\end{aligned}$$

を得る．また，$\chi\neq\mathbf{1}_F$ かつ $\forall v\notin S$ について χ_v が不分岐である場合は明らかに

$$\zeta(\phi,1,\chi)=\frac{\mathrm{vol}_M}{c_F}\mathfrak{c}_F(S,\chi)\sum_{x\in F_S^\times/(F_S^\times)^2}\chi_S(x)\,J_G(u_x,f_S)$$

が従う．後はこれらの等式を合わせれば定理の等式が従う． □

定理 1 によって係数の性質がハッキリしたので，SL(2) の跡公式のユニポテント項の性質を明らかにするためには，局所的な重み付き軌道積分 $J_M(1,f_S)$ と $J_G(u_x,f_S)$ の性質が分かれば良い．重み付き軌道積分の性質については Arthur や Hoffmann による一連の研究を参照されたい．

定理 1 の等式の持つ意味を考えよう．まず等式 (1) は定理 1 の証明におけるポイントであった．論文 [LL] ではユニポテント項を等式 (1) を用いて安定化させている．等式 (2) を見てみよう．第一項は GL(2) の跡公式のユニポテント項と対応しているのだから，いわゆる安定項である．ここで L を非自明な 2 次指標 χ に対応する F の 2 次拡

大とする．トーラス $H = R^{(1)}_{L/F}(\mathbb{G}_m)$ は SL(2) の楕円内視群 (elliptic endoscopic group) である．非自明な 2 次指標 χ に対して，もし f^H を f の H への移送とすると，

$$\zeta(\phi, 1, \chi) = L(1, \chi)\, f^H(1)$$

が成り立つので，SL(2) のユニポテント項の安定化が得られる．このようにして，係数に現れる非自明な 2 次指標の項 $\chi_S(x)\, \mathfrak{c}_F(S, \chi)$ が G の内視群に由来することが分かった．また，ユニポテント軌道積分の係数に綺麗な記述を与えることと，ユニポテント項を安定化させることは，かなり近い問題であることが分かる．

既知の研究とユニポテント項の関係を振り返ろう．離散系列表現の擬係数を不変跡公式へ適用すると，いつくかの既知の公式が得られる (cf. [TW])．しばらく $F = \mathbb{Q}$ の場合を考えよう．擬係数はカスピダルなので，例えば $\Gamma_0(N)$ や $\Gamma(N)$ に関する指標が自明で重さが 2 以上の正則カスプ形式の空間に関する次元公式には $J_G(u, f_S)$ $(u \neq 1)$ の項は消えてしまい寄与しない (cf. [Shimizu2])．$J_G(u, f_S)$ $(u \neq 1)$ の項が消えずに現れるような代表的な例を挙げよう．$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma(p)$ (p は素数で $\mathbb{F}_p$ は位数 p の有限体) は $\Gamma(p)$ の正則カスプ形式の空間に自然に作用している．この作用の既約分解を考えたときに，ある既約表現たちの重複度の差が虚二次体の類数になることが Hecke によって示された (cf. [Hecke])．この結果に Eichler によって跡公式を使った証明が与えられた (cf. [Eichler])．実際に跡公式で計算して見ると，その差の虚二次体の類数がユニポテント項の $L(1, \chi)$ から来ることが簡単に分かる．[LL] でも Hecke の論文が引用されているように，この現象がユニポテント項の関係するエンドスコピーの一例となっている．その後，この研究はヒルベルトカスプ形式の場合に一般化されている (see, e.g., [Saito1])．

次に F を総実体 ($[F : \mathbb{Q}] \geq 2$) としよう (このとき $\Sigma_\infty = \Sigma_\mathbb{R}$)．つまりヒルベルトカスプ形式の場合を考える．その空間の次元公式は跡公式を用いて Shimizu によって与えられた (cf. [Shimizu1])．実素点が増えるので擬係数を跡公式に適用した場合は simple trace formula の観点から $J_M(1, f_S)$ の項は消えてしまい寄与を持たない．ここで清水 L 関数 $L(M_\nu, V_\nu, s)$ を導入しよう．$n = [F : \mathbb{Q}]$, N はノルム，離散群の各カスプ ν ごとに F の格子 M_ν と単数群の部分群 V_ν が定められ

$$L(M_\nu, V_\nu, s) = \sum_{\mu \in M_\nu / V_\nu} \frac{\mathrm{sgn}(N(\mu))}{|N(\mu)|^s}$$

と清水 L 関数が定められる．Shimizu の次元公式の単位元でないユニポテントの寄与は各カスプごとに存在する．特殊値 $L(M_\nu, V_\nu, 1)$ と適当に正規化した $\prod_{v \in \Sigma_\infty} F_v$ を M_ν で割った基本領域の体積 $d(M_\nu)$ によって

$$\frac{i^n}{(2\pi)^n}\, d(M_\nu)\, L(M_\nu, V_\nu, 1)$$

と各カスプの寄与が与えられる (cf. [Shimizu1, p.63])．もし離散群が $\mathrm{SL}(2, \mathfrak{O})$ であるならば，d を $\mathbb{Q}$ 上の F の判別式とすると Hammond と Hirzebruch によって

$$\frac{i^n}{(2\pi)^n} \sum_\nu d(M_\nu)\, L(M_\nu, V_\nu, s) = \frac{i^n d^{1/2}}{\pi^n} \sum_\chi L(s, \chi)$$

が示された (cf. [HH])．ただし，左の和はカスプの代表元全体を走り，右は $\chi_v = \mathrm{sgn}$ $(\forall v \in \Sigma_\infty)$ かつ $\forall v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について χ_v は不分岐となる 2 次指標 $\chi = \prod_v \chi_v$ 全体を走る．この等式は明らかに (1) からも従う．もちろん $\mathrm{SL}(2, \mathfrak{O})$ の部分群への一般化も易しい．

特に $s=1$ を代入した

$$(3) \qquad \frac{i^n}{(2\pi)^n}\sum_{\nu} d(M_\nu)\,L(M_\nu,V_\nu,1)=\frac{i^n d^{1/2}}{\pi^n}\sum_{\chi} L(1,\chi)$$

は次元公式への単位元を除くユニポテント元全体の寄与となる．したがって次元公式へのユニポテント元の寄与も内視群に由来する．公式(3)をもう少し味わおう．(3)の右辺は内視群 $R^{(1)}_{L/F}(\mathbb{G}_m)$ に関する単位元の寄与の和であるが，左側は何の和だろうか?n を偶数としよう．Hirzebruch予想とは各カスプで定義される符号数不足指数(signature defect)と $\frac{i^n}{(\pi)^n}\sum_\nu d(M_\nu)\,L(M_\nu,V_\nu,1)$ が一致するであろうと言う予想であった (cf. [Hirzebruch])．この予想はAtiyah-Donnelly-Singer, Müller, Ishida-Ogataによって，それぞれ独立に解かれている．詳細については [Müller] や [Ogata] や [Oda] を参照されたい．その結果，(3)の左辺は各カスプの符号数不足指数の和になっている．(3)の左辺は幾何学的量の和であり，右辺は表現論的量の和である．そして，ポアソン和公式から導かれる(1)によって，それらは結び付く．階数が2以上の代数群に対するHirzebruch予想の類似物はまだ得られていないようである．跡公式では寄与全体を扱うことになるが，高階数の代数群に対するユニポテント軌道積分の係数の研究は(1)と(3)の類似もしくは一般化を導くと思われる．実際，2元2次形式の空間の新谷ゼータ関数に対する(1)の類似を [HW] で与えている．

2. Sp(2)

前のセクションの記号を引き続き使用する．以下，階数2のシンプレクティック群を $\mathcal{G}$ とする，つまり

$$\mathcal{G}=\mathrm{Sp}(2)=\left\{g\in \mathrm{GL}(4)\ \middle|\ {}^t g\begin{pmatrix} O_2 & I_2\\ -I_2 & O_2\end{pmatrix} g=\begin{pmatrix} O_2 & I_2\\ -I_2 & O_2\end{pmatrix}\right\}$$

とおく．ただし，O_m は m 次の零行列で，I_m は m 次の単位行列とする．このセクションでは $\mathcal{G}$ のユニポテント軌道積分の係数 $a^{\mathcal{G}}(S,u)$ に関する [HW] の結果を紹介する．係数 $a^{\mathcal{G}}(S,u)$ の定義に関しては [Arthur1] もしくは [Arthur2] もしくは [HW] を参照されたい．

まず S が2を割る素点をすべて含むことを仮定しよう．この仮定は記述の簡略化のためのみに必要とされる．係数の結果を説明するために2元2次形式の空間に関する新谷ゼータ関数を導入しよう．$F^\times/(F^\times)^2$ における $d\in F^\times$ の同値類を $\check{d}$ と記述する．各 $\check{d}$ に対して類体論より $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上の2次指標 $\chi_d=\prod_v \chi_{d,v}$ が得られる．

$$\mathfrak{Q}(F)=\{\check{d}\in F^\times/(F^\times)^2 \mid d\in F^\times-(F^\times)^2\}$$

と，$d_S\in F_S^\times$ について

$$\mathfrak{Q}(F,S,d_S)=\{\check{d}\in \mathfrak{Q}(F)\mid d\in d_S(F_S^\times)^2\}$$

と置く．$N(\mathfrak{f}_d^S)$ を $\chi_{d,v}$ が分岐している $v\notin S$ についての q_v の積とする．そうすると，新谷ゼータ関数が

$$\xi^S(s;d_S)=\frac{\zeta_F^S(2s-1)\,\zeta_F^S(2s)}{\zeta_F^S(2)}\sum_{\check{d}\in\mathfrak{Q}(F,S,d_S)}\frac{L^S(1,\chi_d)}{L^S(2s,\chi_d)\,N(\mathfrak{f}_d^S)^{s-\frac{1}{2}}}$$

と与えられる．このゼータ関数 $\xi^S(s;d_S)$ はSaitoの明示的公式 [Saito2, Saito3] から導かれる．ゼータ関数 $\xi^S(s;d_S)$ は本質的に [Datskovsky] で与えられた $\xi_{\mathrm{x}_S}(s)$ と一致するが，Saitoの方法から導く方が定式化に適している．[Siegel] や [Shintani] で扱われていたオ

リジナルの形の新谷ゼータ関数は [Saito3, Section 2] に書かれている方法で $\xi^S(s;d_S)$ と関係付けることができる．$\xi^S(s;d_S)$ の s-平面への有理型接続は [Yukie] より従う．特に $\xi^S(s;d_S)$ は $s=3/2$ に 1 位の極を持つ (cf. [HW]).

群 $\mathcal{G}$ は四つのユニポテント元のクラス (i) 単位元 (unit), (ii) 極小 (minimal), (iii) 準正則 (subregular), (iv) 正則 (regular) を持つ．次のようにクラス (ii)(iii)(iv) に属する元の記号を定めておく．

$$n_{\min}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&\alpha&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad n_{\mathrm{sub}}(x)=\begin{pmatrix}I_2&x\\O_2&I_2\end{pmatrix},\quad n_{\mathrm{reg}}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&1&0&\alpha\\0&1&0&\alpha\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

$n_{\mathrm{sub}}(x)\in\mathcal{G}$ であるなら x は対称行列であることに注意されたい．$V^0(F)$ を F 上の非退化な 2 次の対称行列の集合とし，元 $x\in V^0(F)$ について $\varepsilon_v(x)$ を F_v 上のハッセ不変量とする．$V^0(F)$ 上の同値関係 $\sim_S$ を

$$x\sim_S y\ \Leftrightarrow \text{「}\det(x^{-1}y)\in(F_S^\times)^2 \text{ かつ } \varepsilon_v(x)=\varepsilon_v(y)\ (\forall v\in S)\text{」}$$

によって定める．ここで，$\mathcal{G}(F)$ のユニポテント元全体の $\mathcal{G}(F_S)$-共役類の集合を $(\mathcal{U}_{\mathcal{G}}(F))_{\mathcal{G},S}$ と記すと，

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{G}}(F))_{\mathcal{G},S}=\left\{1,\ n_{\min}(\alpha),\ n_{\mathrm{sub}}(x),\ n_{\mathrm{reg}}(\alpha)\ \middle|\ \begin{matrix}\alpha\in F^\times/(F^\times\cap(F_S^\times)^2),\\ x\in V^0(F)/\sim_S\end{matrix}\right\}$$

が成り立つ．M_0 を $\mathcal{G}$ の対角行列全体から成る極小 Levi 部分群とする．[HW] と同様に M_1 をジーゲル放物部分群の Levi 部分群，M_2 をヤコビ放物部分群の Levi 部分群とする．さらに [HW] と全く同じように $\mathfrak{a}_{M_0}$ と $\mathfrak{a}_{M_1}$ と $\mathfrak{a}_{M_2}$ 上の測度を定めると体積 vol_{M_0} と vol_{M_1} と vol_{M_2} も定まる．最後にユニポテント軌道積分も [HW] と同じに定めておく．基本的には前のセクションと同じような感じで測度を定めている．これらの正規化のもとで，ユニポテント軌道積分の係数は次のようになる．

定理 2. 元 $\alpha\in F^\times$ について

$$a^{\mathcal{G}}(S,n_{\min}(\alpha))=\frac{\mathrm{vol}_{M_2}}{2\,c_F}\sum_{\chi}\chi_S(\alpha)\,L^S(2,\chi),$$

ここで $\chi=\prod_{v\in\Sigma}\chi_v$ は任意の $v\notin S$ について χ_v が不分岐であるような $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上の 2 次指標全体を走る．次に $x\in V^0(F)$ について

$$\begin{aligned}a^{\mathcal{G}}(S,n_{\mathrm{sub}}(x))=&\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F}\mathfrak{C}_F(S,-\det(x))+\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F}\Big(\prod_{v\in S}\varepsilon_v(x)\Big)\sum_{\check{d}\in\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S,-\det(x))}L^S(1,\chi_d)\\&+\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F}\begin{cases}\zeta_F^S(3)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_F^S(s)|_{s=3} & x\sim_S\mathfrak{x}_1 \text{ のとき},\\ 0 & x\not\sim_S\mathfrak{x}_1 \text{ のとき},\end{cases}\end{aligned}$$

ただし $\mathfrak{x}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ とおき，$\mathfrak{C}_F(S,\alpha)$ は $\xi^S(s;\alpha)$ の $s=3/2$ におけるローラン展開の定数項とし，

$$\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S,d_S)=\{\check{d}\in\mathfrak{Q}(F,S,d_S)\mid \chi_{d,v}\text{ は任意の } v\notin S \text{ について不分岐}\}$$

とする．元 $\alpha \in F^\times$ について

$$a^{\mathcal{G}}(S, n_{\mathrm{reg}}(\alpha)) = \frac{\mathrm{vol}_{M_0}}{4\,c_F^2} \sum_{\chi} \left\{ 2\,\mathfrak{c}_F(S,\chi)\,\mathfrak{c}_F(S,\mathbf{1}_F) + w(\chi)\,\mathfrak{c}'_F(S,\chi)\,c_F^S \right\} \chi_S(\alpha),$$

ただし

$$w(\chi) = \begin{cases} 3 & \chi = \mathbf{1}_F \text{ のとき}, \\ 1 & \chi \neq \mathbf{1}_F \text{ のとき}, \end{cases} \quad \mathfrak{c}'_F(S,\chi) = \frac{1}{2} \lim_{s\to+1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} (s-1)\, L^S(s,\chi),$$

そして，$\chi = \prod_{v\in\Sigma} \chi_v$ は任意の $v \notin S$ で χ_v が不分岐であるような $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上のすべての 2 次指標を走る．

Proof. 証明の詳細については [HW] を参照されたい． □

最後に上記の係数の結果とエンドスコピーの関係について簡単に言及しておこう．Assem による $\mathcal{G}(F_v)$ の局所ユニポテント軌道積分に関する研究から局所の安定化についてはだいたい分かっている (cf. [Assem])．つまり係数の研究から大域的な安定化についての部分的な予想が得られる．Assem の結果を踏まえた上で，$L^S(2,\chi_d)$ は quasi-split な群 $\mathrm{SO}(4,\chi_d)$ の体積だと解釈すると，係数 $a^{\mathcal{G}}(S, n_{\min}(\alpha))$ と $\mathcal{G}$ の楕円内視群 $\mathrm{SO}(4,\chi_d)$ に関係が付く．同様にして $a^{\mathcal{G}}(S, n_{\mathrm{sub}}(x))$ における $L^S(1,\chi_d)$ の項と楕円内視群 $\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SO}(2,\chi_d)$ が関係付けれる．$a^{\mathcal{G}}(S, n_{\mathrm{reg}}(\alpha))$ に関しては $\mathrm{SO}(4,\chi_d)$ と $\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SO}(2,\chi_d)$ の安定ユニポテント軌道積分の係数の一次結合と関係付けることができる．

References

[Arthur1] J. Arthur, A measure on the unipotent variety, Canad. J. Math. **37** (1985), 1237–1274.

[Arthur2] J. Arthur, An introduction to the trace formula, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Assem] M. Assem, Unipotent orbital integrals of spherical functions on p-adic 4×4 symplectic groups, J. Reine Angew. Math. **437** (1993), 181–216.

[Datskovsky] B. Datskovsky, A mean-value theorem for class numbers of quadratic extensions, in: A tribute to Emil Grosswald: number theory and related analysis, 179–242, Contemp. Math. **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[Eichler] M. Eichler, Einige Anwendungen der Spurformel im Bereich der Modularkorrespondenzen (German), Math. Ann. **168** (1967), 128–137.

[FL] T. Finis, E. Lapid, On the Arthur-Selberg trace formula for GL(2), Groups Geom. Dyn. **5** (2011), 367–391.

[Flicker] Y. Flicker, The trace formula and base change for GL(3), Lecture Notes in Mathematics **927**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[GJ] S. Gelbart, H. Jacquet, Forms of GL(2) from the analytic point of view. Automorphic forms, representations and *L*-functions, Part 1, pp. 213–251, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[JL] H. Jacquet, R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[HH] W. F. Hammond, F. Hirzebruch, L-series, modular imbeddings, and signatures, Math. Ann. **204** (1973), 263–270.

[Hecke] E. Hecke, Über das verhalten der integrale 1. gattung bei abbildungen, insbesondere in der theorie der elliptischen modulfunktionen (German), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **8** (1931), 271–281.

[Hirzebruch] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, L'Enseign. Math. **19** (1973), 183-281.

[Hoffmann] W. Hoffmann, The nonsemisimple term in the trace formula for rank one lattices, J. Reine Angew. Math. **379** (1987), 1–21.

[HW] W. Hoffmann, S. Wakatsuki, On the geometric side of the Arthur trace formula for the symplectic group of rank 2, preprint.

[LL] J.-P. Labesse, R. P. Langlands, L-indistinguishability for SL(2), Canad. J. Math. **31** (1979), 726–785.

[Matz] J. Matz, Arthur's trace formula for GL(2) and GL(3) and non-compactly supported test functions, Dissertation, Universität Bonn.

[Müller] W. Müller, The eta invariant (some recent developments), Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque No. 227 (1995), Exp. No. 787, 5, 335–364.

[Oda] T. Oda, Rank one cusp singularities and the dimension formulae, 第３回オータムワークショップ報告集.

[Ogata] S. Ogata, 特異点と符号数定理, 数学, Vol. 45 (1993) No. 1 P 1-11.

[Saito1] H. Saito, On the representation of $SL_2(\mathbb{F}_q)$ in the space of Hilbert modular forms, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 101–128.

[Saito2] H. Saito, Explicit formula of orbital p-adic zeta functions associated to symmetric and Hermitian matrices, Comment. Math. Univ. St. Paul. **46** (1997), 175–216.

[Saito3] H. Saito, Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, Math. Ann. **315** (1999), 587–615.

[Shintani] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 25–65.

[Shimizu1] H. Shimizu, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, Ann. of Math. (2) **77** 1963, 33–71.

[Shimizu2] 清水英男，保型関数 I, 岩波書店.

[Siegel] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, (German), Math. Z. **43** (1938), 682–708.

[TW] M. Tsuzuki, S. Wakatsuki, GL(2) の跡公式, 第１８回（２０１０年度）整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」. (日本語)

[Wright] D. J. Wright, Twists of the Iwasawa-Tate zeta function, Math. Z. **200** (1989), 209–231.

[Yukie] A. Yukie, On the Shintani zeta function for the space of binary quadratic forms, Math. Ann. **292** (1992), 355–374.

Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakumamachi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192, Japan

E-mail address: `wakatsuk@staff.kanazawa-u.ac.jp`